数理解析研究所講究録
382巻 1980年 194-198

直交多項式による微分方程式の数値解法

早大 理工　室谷義昭

チェビシェフ級数による常微分方程式の解の展開係数毎評価法の理論的基礎付けについては［1］で述べた。そこでは微分方程式から得られる係数方程式に着目し，それにいわゆる"部分反復法"を適用することにより，解の係数毎評価法とそれに関係した事前評価を求めた。

本講演では，上の評価法に基づく近似解の計算法が，チェビシェフ級数だけでなく，フーリエ級数やルジャンドル級数の場合にも適用可能であること，その際の未定係数 $\{c_p\}$ の選び方，$\{c_p\}$ を解とする連立方程式：

(1) $c_p = \sum_{q=1}^{N} \gamma_{pq} c_q + d_p, \quad 1 \le p \le N$

の係数 $\{\gamma_{pq}\}$，$\{d_p\}$ の計算および（1）を解くための若干の手法および注意点について述べる。

まず，未定係数 $\{c_p\}$ は高階の導関数の展開係数に注目すべきこと，$\{c_p\}$ の計算法に関係すべきである。つまり，部

分反復法が適用可能なように未定係数 $\{c_p\}$ を選ぶ。

つぎに，係数 $\{\gamma_{pq}\}$ や $\{d_p\}$ は基本的には使用する直交多項式に対応したガウスの数値積分公式を用いて計算できる。組込み関数や数表が利用できなくても，直交多項式の漸化式に対応した対称な三重対角行列の固有値をQR法（例えば，島崎のアルゴリズム［2］）で求めると，その計算量は直交多項式の次数 n に対し，$O(n^2)$ で計算できる。勿論，加法定理や漸化式を利用して計算できることもあり有効な場合が多い。ルジャンドル多項式の場合でも結構有効である。チェビシェフ多項式や三角多項式の場合にはFFTが使える。

連立方程式（1）の解法としては $\{c_p\}$ が関数の展開係数であることに着目した部分反復法が有効となる。その理論的基礎付けについては［1］を参照してほしい。なお，部分反復法とは例えば，つぎのような反復法をさす：$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

$$(2)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\bar{c}_j^{(m+1)} = -\sum_{q=r+1}^{N}\gamma_{iq}\bar{c}_q^{(m)} + d_i, \quad 1\leqq i\leqq r, \quad a_{ij}=\delta_{ij}-\gamma_{ij},\ m\geqq 0, \\ (I-\gamma_{pp})\bar{c}_p^{(m+1)} = \sum_{i=1}^{p-1}\gamma_{pi}\bar{c}_i^{(m+1)} + \sum_{q=p+1}^{N}\gamma_{pq}\bar{c}_q^{(m)}, \quad r+1\leqq p\leqq N, \quad I:\text{単位小行列}. \end{cases}$$

その際に，各反復毎に既知の $\{b_i\}$ に対し，

$$(3)\quad \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\bar{c}_j = b_i, \quad 1\leqq i\leqq r,$$

の形の連立方程式を解く必要があるが，r がある程度大きい自然数でしかも，$r\ll N$ の場合には，各反復列 $\{\bar{c}_p^{(m)}\}$ の収束が速く，直接解法に比べ，比較的少ない計算量で $\{c_p\}$ が計

算できる場合が多い。

非線形微分方程式に対しても［1］の手法が適用できる。例えば，2点境界値問題：

(4) $D^2u(t)=f(t,u)$, $u(-1)=\alpha$, $u(1)=\beta$

の場合，適当に選んだ近似解 $u^{(0)}(t)$ に対し，

$$(5)\quad \begin{cases} D^2v^{(m)}(t)+\sigma(t)v^{(m)}(t)=\eta^{(m)}(t), & v^{(m)}(-1)=v^{(m)}(1)=0 \\ v^{(m)}(t)=u^{(m)}(t)-u^{(m+1)}(t), & \sigma(t)\fallingdotseq f_u(t,u^{(0)}),\ \eta^{(m)}(t)=D^2u^{(m)}(t)-f(t,u^{(m)}), \end{cases}$$

となる反復列 $\{v^{(m)}(t)\}$ を考えるとき，$D^2v^{(m)}(t)$ のチェビシェフ級数を

$$(6)\quad D^2v^{(m)}(t)\sim\sum_{p=1}^{\infty} c_p^{(m)}w_p(t),\quad w_p(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{if } p=1,\\ \cos(p-1)\theta,\ \cos\theta=t, & \text{if } p\geq 2,\end{cases}$$

とすると，(5)よりつぎのような連立の係数方程式を得る：

$$(7)\quad \begin{cases} c_p^{(m)}=\sum_{q=1}^{N}\gamma_{pq}c_q^{(m)}+d_p^{(m)}, & p\geq 1,\quad m\geq 0 \\ d_p^{(m)}=\sum_{q=1}^{N}\tilde{\gamma}_{pq}^{(m)}c_q^{(m-1)}, & p\geq 1,\quad m\geq 1. \end{cases}$$

したがって，$m=0,1,2,\cdots\cdots$ に対し(2)の部分反復法を順次適用することにより，$\{u^{(m)}(t)\}$ の展開係数，したがって，解 $u(t)$ の展開係数の近似値を計算できる。r が大きいと各 m 毎の反復(2)の"縮少係数" k は小さくなり，また，近似値 $u^{(0)}(t)$ が十分解 $u(t)$ に近いならばその近さに応じて各 m 毎の反復(7)の"縮少係数" $\tilde{k}$ も小さくなる。(精確な係数 k と $\tilde{k}$ の定義については［1］を参照せよ。) 逆に，$r\ll N$ で，k と $\tilde{k}$ が小さい程，部分反復法は有効になる。

数値例.

i) チェビシェフ多項式を用いる, [1] でいう r 次のガレルキン近似解 $\tilde{u}_r(t)$ を $u^{(0)}(t)$ に選んだ場合.

例1. $D^2u=\frac{u^3}{8}$, $u(-1)=1$, $u(1)=2$,

r	κ	$\tilde{\kappa}$
2	$0{,}505\times10^{-1}$	$0{,}240\times10^{-1}$
3	$0{,}228\times10^{-1}$	$0{,}284\times10^{-2}$
4	$0{,}155\times10^{-1}$	$0{,}601\times10^{-3}$
5	$0{,}111\times10^{-1}$	$0{,}107\times10^{-3}$
6	$0{,}835\times10^{-2}$	$0{,}195\times10^{-4}$
⋮	⋮	⋮
19	$0{,}124\times10^{-2}$	$0{,}262\times10^{-9}$

例2. $D^2u=\frac{3}{8}u^2$, $u(-1)=4$, $u(1)=1$,

r	κ	$\tilde{\kappa}$
2	$0{,}853\times10^{-1}$	$0{,}261\times10^{0}$
	$0{,}307\times10^{-1}$	$0{,}395\times10^{-2}$
6	$0{,}166\times10^{-1}$	$0{,}166\times10^{-3}$
8	$0{,}105\times10^{-1}$	$0{,}686\times10^{-5}$
10	$0{,}727\times10^{-2}$	$0{,}274\times10^{-6}$
⋮	⋮	⋮
19	$0{,}247\times10^{-2}$	$0{,}981\times10^{-10}$

例3. $D^2u=e^u/4$, $u(-1)=u(1)=0$,

r	κ	$\tilde{\kappa}$
19	$0{,}259\times10^{-3}$	$0{,}261\times10^{-10}$

例4. $D^2u=(1-u^2)Du-u/16$, $u(-1)=0$, $u(1)=2$,

r	κ	$\tilde{\kappa}$
19	$0{,}232\times10^{-1}$	$0{,}189\times10^{-9}$

ii) 三角多項式を用いる, [3] でいう r 次のガレルキン近似解を $u^{(0)}(t)$ に選んだ場合.

例5. $D^2u+2{,}25u+(u-1{,}5\sin t)^3=2\sin t$,

r	κ	$\tilde{\kappa}$
2	$0{,}511\times10^{-3}$	$0{,}241\times10^{-5}$
8	$0{,}442\times10^{-4}$	$0{,}492\times10^{-10}$

例6. $D^2u+u^3=\sin t$.

r	κ	$\tilde{\kappa}$
2	$0{,}132\times10^{0}$	――
8	$0{,}114\times10^{-1}$	$0{,}837\times10^{-7}$

例7. $\begin{cases} D^2u+\left(\frac{3}{\omega}\right)^2u(1+\varepsilon u^2)=\left(\frac{3}{\omega}\right)^2\cos 3t, \\ \omega=3{,}05, \quad \varepsilon=0{,}125, \end{cases}$

r	κ	$\tilde{\kappa}$
8	$0{,}190\times10^{-3}$	$0{,}476\times10^{-9}$

例8. $\begin{cases} D^2u+\frac{3\sigma}{\omega}Du+\left(\frac{3}{\omega}\right)^2u(1+\varepsilon u^2)=\left(\frac{3}{\omega}\right)^2\cos 3t, \\ \sigma=2^{-10}, \quad \omega=3{,}1, \quad \varepsilon=0{,}125, \end{cases}$

r	κ	$\tilde{\kappa}$
16	$0{,}427\times10^{-3}$	$0{,}144\times10^{-8}$

例9. $D^2u - \lambda(1-u^2)Du + u - \lambda \sin t = 0$,　$\lambda = 0.1$,

r	κ	$\tilde{\kappa}$
16	0.272×10^{-1}	0.439×10^{-8}

iii) ルジャンドル多項式を用いる，[4] の手法で，解の各係数を小数点以下9桁以下を切捨てたものを係数とする近似解を $u^{(0)}(t)$ に選んだ場合．

例10. $D^2u = \frac{1}{8}\left(u+\frac{t+3}{2}\right)^3$, $u(-1)=u(1)=0$,

r	κ	$\tilde{\kappa}$
14	0.176×10^{-2}	0.801×10^{-7}

例11. $D^2u = \frac{3}{8}\left(u+\frac{5-3t}{2}\right)^2$, $u(-1)=u(1)=0$,

r	κ	$\tilde{\kappa}$
14	0.352×10^{-2}	0.769×10^{-7}

例12. $D^2u = e^u/4$, $u(-1)=u(1)=0$,

r	κ	$\tilde{\kappa}$
14	0.377×10^{-3}	0.862×10^{-8}

なお，$u^{(0)}(t)\equiv 0$ より出発する普通のニュートン法で反復した場合の反復列を $\{u^{(m)}(t)\}$ とすると，$\|Du^{(m)}-Du^{(m-1)}\|$ はつぎのようになる。

m	例10.	例11.	例12.
1	0.227×10^{0}	0.986×10^{0}	0.152×10^{0}
2	0.550×10^{-2}	0.542×10^{-1}	0.656×10^{-3}
3	0.325×10^{-5}	0.190×10^{-3}	0.121×10^{-7}
4	0.115×10^{-11}	0.237×10^{-8}	0.414×10^{-17}

参考文献

[1] 高橋磐郎・室谷義昭「数値計算とその応用」，コロナ社 (1979).

[2] 戸川隼人「マトリックスの数値計算」，オーム社 (1971).

[3] Urabe, M., Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems, Arch. Rational Mech. Anal. 20 (1965).

[4] 室谷義昭「ルジャンドル級数による常微分方程式の数値解法について」日本数学会応用数学分科会講演予稿集 (1980年4月).